ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 15 Μαΐου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

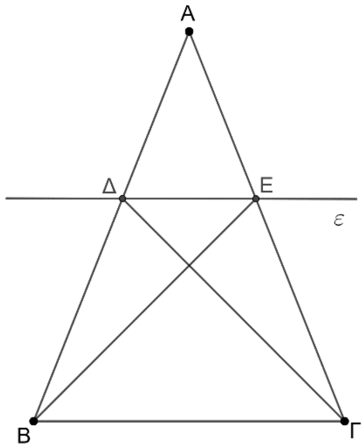
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 88 σχολικού βιβλίου

Α2. α) Λ
β) Σ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β



Α1. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ισχύει $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Επειδή ΔΕ // ΒΓ, το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο, του οποίου οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ είναι ίσες.

Επομένως το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Α2. Επειδή ε//ΒΓ ισχύουν: $A\hat{\Delta}E = \hat{B}$ και $A\hat{E}\Delta = \hat{\Gamma}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα). Όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ άρα $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$ κι έτσι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Α3. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΓ έχουν:

ΑΒ = ΑΓ (ΑΒΓ ισοσκελές)

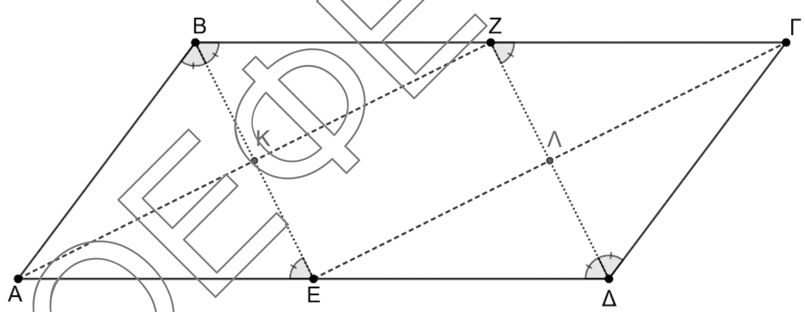
ΑΕ = ΑΔ (ΑΔΕ ισοσκελές)

$B\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma$ (κοινή γωνία)

Οπότε από το κριτήριο ισότητας τριγώνων Π-Γ-Π είναι ίσα

Παρατήρηση. Η επίλυση των ερωτημάτων μπορεί να γίνει με οποιαδήποτε σειρά, οπότε μπορούν τα παιδιά να τα λύσουν με διαφορετικούς τρόπους.

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Είναι $AB = //\Gamma\Delta$ και $B\Gamma = //A\Delta$ αφού ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Επίσης επειδή $A\Delta = 2AB$ προκύπτει ότι $AB = \Gamma\Delta = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$.

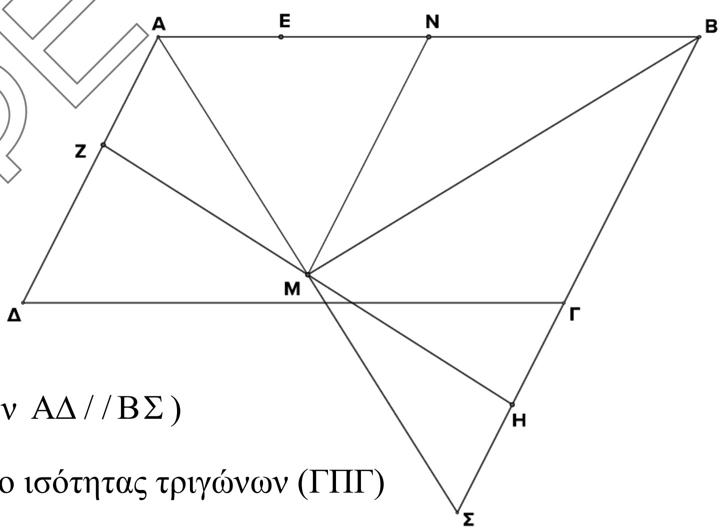
Η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ οπότε $A\hat{B}E = E\hat{B}Z$. Επίσης $E\hat{B}Z = A\hat{E}B$ ως εντός εναλλάξ των $B\Gamma//A\Delta$, άρα $A\hat{B}E = A\hat{E}B$ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $AB = AE = \frac{A\Delta}{2}$, οπότε Ε μέσο ΑΔ.

Όμοια η ΔΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$ οπότε $\Gamma\hat{\Delta}Z = Z\hat{\Delta}E$. Επίσης $Z\hat{\Delta}E = \Delta\hat{Z}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των $B\Gamma//A\Delta$, άρα $\Delta\hat{Z}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}Z$ και το τρίγωνο ΓΖΔ είναι ισοσκελές με $\Gamma Z = \Gamma\Delta = AB = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$, οπότε Ζ μέσο ΒΓ.

Γ2. Επειδή Ζ και Ε μέσα των ίσων πλευρών ΒΓ και ΑΔ τότε ΒΖΔΕ παραλληλόγραμμο διότι $BZ = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Delta}{2} = E\Delta$ και $BZ//E\Delta$.

Γ3. Στο τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι $BZ = // AE$, διότι Ζ, Ε μέσα των ίσων πλευρών ΒΓ και ΑΔ, άρα το ΑΒΖΕ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές ΑΒ και ΒΖ είναι ίσες διότι $AB = \frac{B\Gamma}{2} = BZ$ άρα το ΑΒΖΕ είναι ρόμβος.

Γ4. Είναι $Z\Gamma = // AE$ αφού Ζ, Ε μέσα των $AB = // \Gamma\Delta$, άρα ΑΕΓΖ παραλληλόγραμμο. Επειδή το ΑΒΖΕ είναι ρόμβος θα είναι $BE \perp AZ$, οπότε $E\hat{K}Z = 90^o$. Τελικά, το ΚΖΛΕ είναι ρόμβος γιατί είναι παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΜΗΣ

1. ΖΜ=ΜΗ (Μ μέσο ΖΗ)
2. $Z\hat{M}A = H\hat{M}\Sigma$ (ως κατακορυφήν)
3. $A\hat{Z}M = M\hat{H}\Sigma$ (ως εντός εναλλάξ των $A\Delta // B\Sigma$)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα από το κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΓΠΓ)

Δ2. Το ΑΖΗΒ είναι τραπέζιο διότι $AZ // BH$ και επειδή η ΜΝ είναι διάμεσος του τραπεζίου τότε: $MN = \frac{AZ + BH}{2} = \frac{AE + EB}{2} = \frac{AB}{2}$

Δ3. Στο τρίγωνο ΑΜΒ, η ΜΝ είναι διάμεσος και είναι ίση με το μισό της πλευράς ΑΒ που αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ορθογώνιο στο Μ, δηλαδή $A\hat{M}B = 90^o$.

Δ4. Στο τρίγωνο ΑΒΣ, η ΜΒ είναι διάμεσος (ΑΜ=ΜΣ) και ύψος ($MB \perp AB$) άρα το τρίγωνο ΑΒΣ είναι ισοσκελές.

**** Εναλλακτικά για τα ερωτήματα Δ2-Δ3-Δ4 μπορούμε να πούμε ότι:**

Από το Δ1 προκύπτει ότι ΑΖ = ΗΣ, άρα ΑΒ = ΒΕ + ΕΑ = ΒΗ + ΗΣ = ΒΣ. Συνεπώς ΑΒ = ΒΣ άρα ΑΒΣ ισοσκελές τρίγωνο.

Δ2. Επειδή Μ, Ν μέσα των ΑΣ (ΑΜ = ΜΣ) και ΑΒ, τότε ΜΝ διάμεσος του τραπεζίου ΑΖΗΒ άρα $\text{ΜΝ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$.

Δ3. Επειδή ΒΜ διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΣ άρα $\text{Α}\hat{\text{Μ}}\text{Β} = 90^{\circ}$.

Δ4. Απαντήθηκε έμμεσα στο Δ1.